FSJES
Ain Chock
FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES,
ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Chapitre 4: Les Variable aléatoires continues

Pr. ALKAMA

Semestre2

Ensemble 11 et 12

Fonction de densité

1. Définition

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

La variable X est dite continue s'il existe une fonction positive f telle que :

$$F(x) = \int_{-\alpha}^{x} f(t)\,dt \;,\forall x \in \mathbb{R} \qquad (18)$$

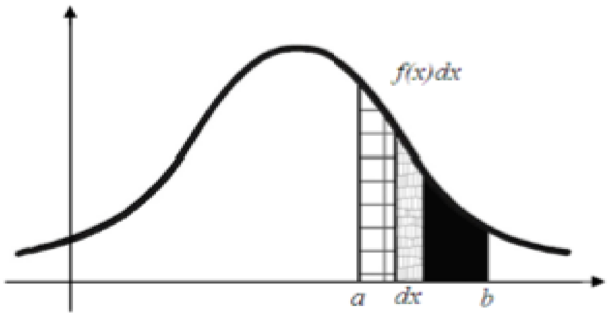
La fonction f est appelé **densité de probabilité** de X.

F est une fonction positive, croissante, telle que : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Fonction de densité

La fonction de densité de probabilité de X vérifie les conditions suivantes :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$
- Si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$



Graphique 2 : Courbe de densité

Remarque : La fonction de densité de probabilité f est appelée aussi la loi de X.

Fonction de densité

Exemple 1:

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{si } 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1.Vérifier que f une fonction de densité de probabilité

2. Calculer la fonction de répartition

3. Représenter le graphique de f et de F

4. Calculer $P(0.5 \leq X \leq 0.7)$

5. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$ à l'aide de $M_X(t)$

Fonction de densité

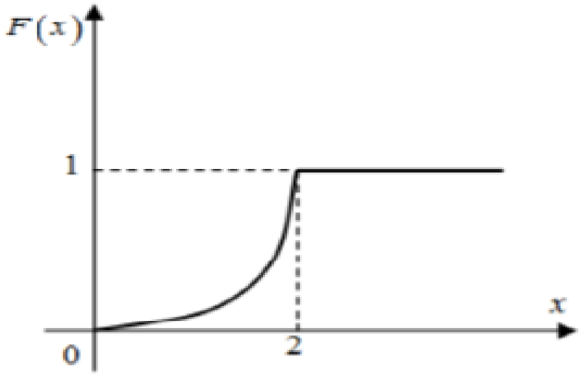
Solution

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx \quad = \int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\right]^2 \; = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2} - 0\right] = 1.$$

2)

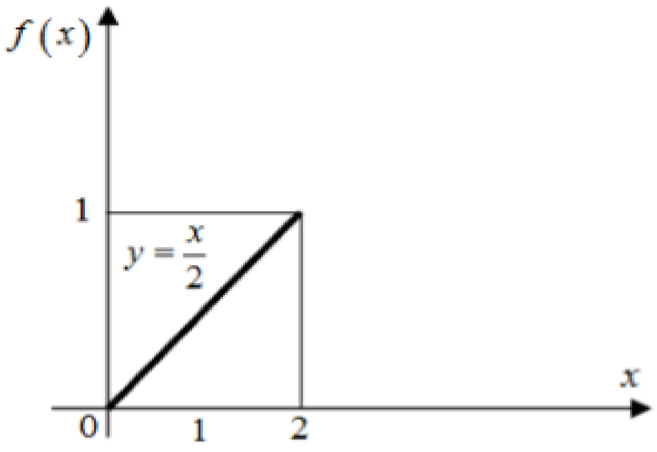
$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$



$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

Fonction de densité

3)



4)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{0}^{2}\frac{x^2}{2}\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Fonction de densité

et $$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{16}{9}\right)$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9}$$

$$= \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}. \quad \Longrightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Espérance mathématique et variance

1. L'espérance mathématique

L'espérance mathématique ou l'espérance d'une variable aléatoire continue, notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

2. La variance

La variance d'une variable aléatoire continue X, notée $V(X)$,est définie par :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

où:

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

Espérance mathématique et variance

Propriétés :

Soient a et b deux constantes ; X et Y deux variables aléatoires continues

- $E(a)=a$ et $V(a)=0$
- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $V(aX+b) = a^2V(X)$

Exemple

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{si } 0<x<3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lois Continues Usuelles: Loi Uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur un intervalle [a , b] si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si a} \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \sim U(a,b)$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \dfrac{(a+b)}{2}$
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Lois Continues Usuelles: Loi Uniforme

Exemple:

Soit une personne qui arrive à la gare de bus en sachant que ce dernier arrive à chaque 60 min. Cette personne n'aucune information ni sur l'heure du denier bus ni sur l'heure de la prochain bus. Il demande les gents de la gare le temps qu'il doit rester en attente du l'heure du prochain bus.

Calculer la probabilité pour cette personne reste en attente entre 15 et 30 min.

Soit X le temps d'attente en min de cette personne. On admet que $X \sim U(0,60)$. On a:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & \text{si } 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors:

$$P(15 \leq X \leq 30) = \int_{15}^{30} f(x)\,dx = \frac{1}{60}[x]_{15}^{30} = \frac{15}{60} = 0.25$$

Lois Continues Usuelles: Loi Normale

3. La loi normale

La loi normale caractérise un phénomène résultant de l'additionnement de plusieurs facteurs qui sont indépendants.

Exemple : les cours d'une action dans une bourse

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ si sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

On écrit : $X \sim N(m,\sigma)$

Lois Continues Usuelles: Loi Normale

2. Caractéristique de la loi normale

- <u>Cas 1:</u> $X \sim N(m,\sigma)$

$$F(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \le \frac{x-m}{\sigma}\right), \text{ avec } Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$= P\left(Y \le \frac{x-m}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

La valeur de ϕ est déterminée à partir de la table normale

$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$

Lois Continues Usuelles: Loi Normale

2. Caractéristique de la loi normale

Si $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ alors Y est appelée la loi normale centrée réduite.

On écrit $Y \sim N(0,1)$

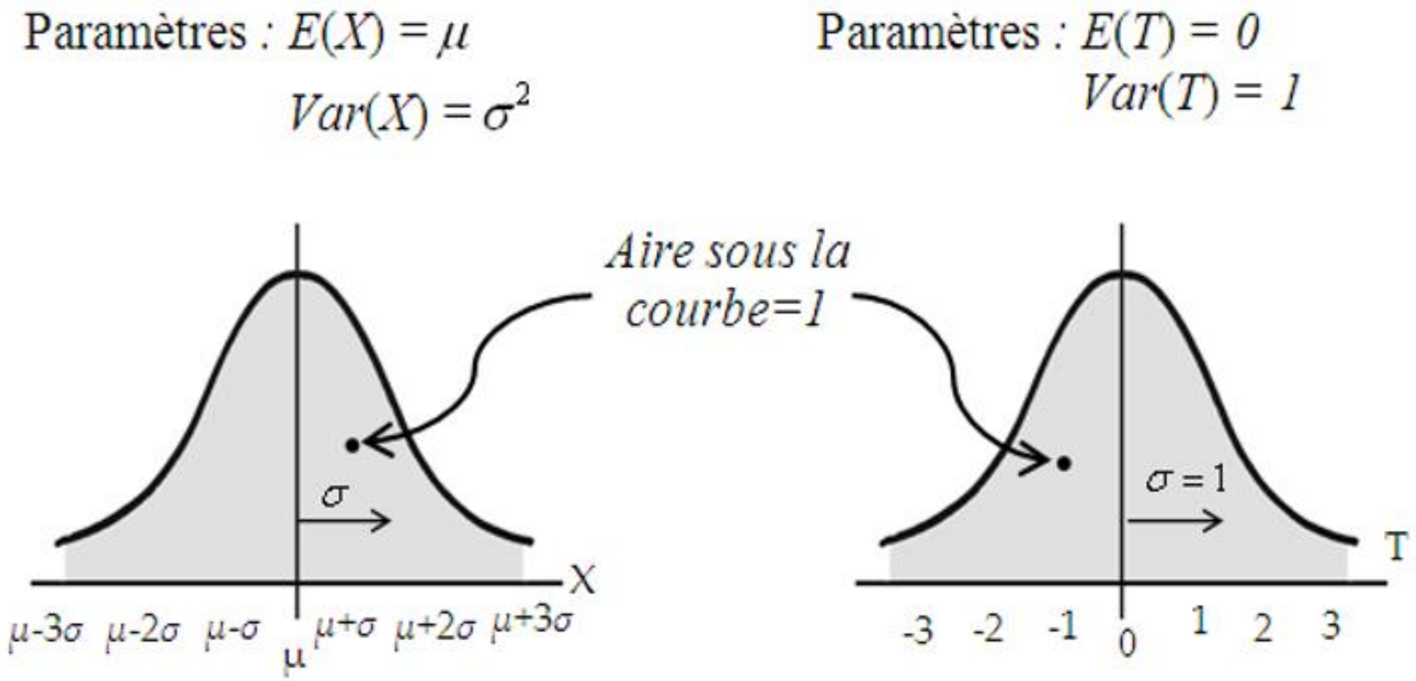
❑ <u>Cas 2:</u> $X \sim N(0,1)$

$$E(X) = 0 \quad , \quad V(X) = 1 \quad \text{et} \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

95% des valeurs de la loi normale $N(0,1)$ sont concentrées dans l'intervalle

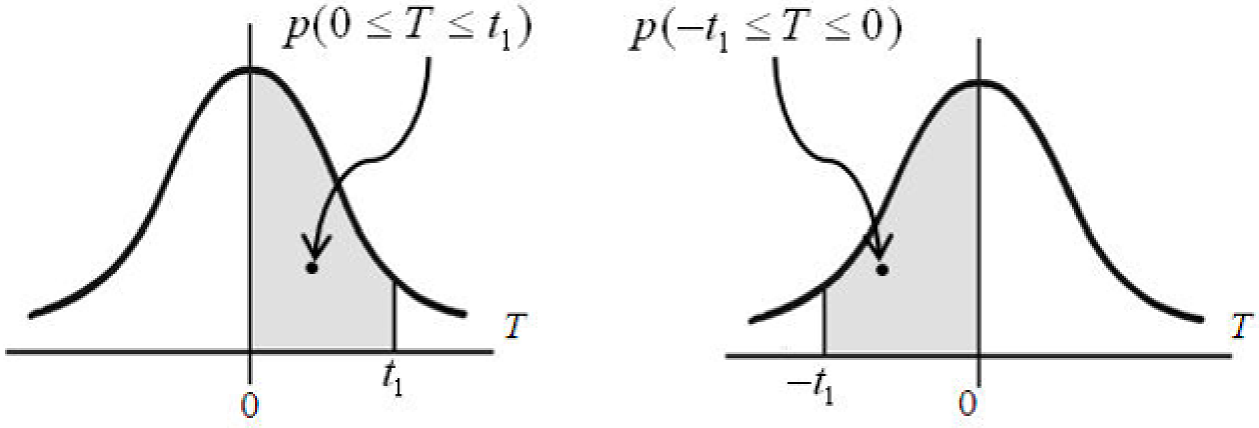
$$[m - 36, m + 36]$$

Lois usuelles continues: Loi Normale



Lois usuelles continues: Loi Normale

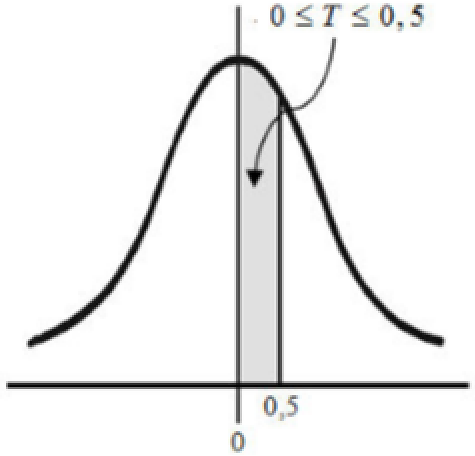
Calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite»



On a: $p(0 \le T \le t_1) = p(0 < T < t_1)$

Lois usuelles continues: Loi Normale

Exemple: Calcul de $p(0 \le T \le 0{,}5)$ par l'utilisation de la table de la loi Normale

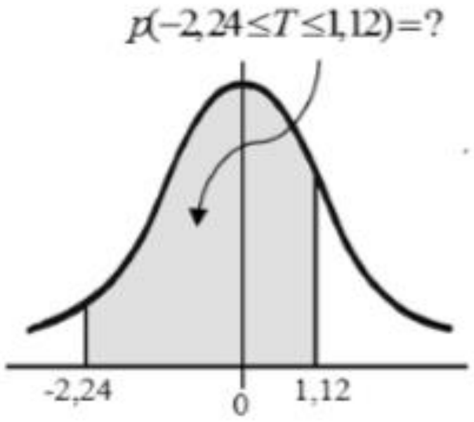


t	0,00	0,01	0,02
0	0.0000	0,0040	0,0080
0,1	0,0398	0,0438	0,0478
0,2	0,0793	0,0832	0,0871
0,3	0,1179	0,1217	0,1255
0,4	0,1554	0,1591	0,1628
0,5	0,1915	0,195	0,1985
0,6	0,2257	0,2291	0,2324
0,7	0,258	0,2611	0,2642
0,8	0,2881	0,291	0,2939
0,9	0,3159	0,3186	0,3212

- pour T=0,50 on lit directement de la table, 0,1915
- pour T=0,00 on lit directement de la table, 0,000

Lois usuelles continues: Loi Normale

Exemple de Calcul : Entre T= -2.24 et T= 1.12



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1.0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4773
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838
2,2	0,4866	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875

à T=1,12 correspond 0,3686

$p(0 \leq T \leq 1,12) = 0,3686$

à T=2,24 correspond 0,4875

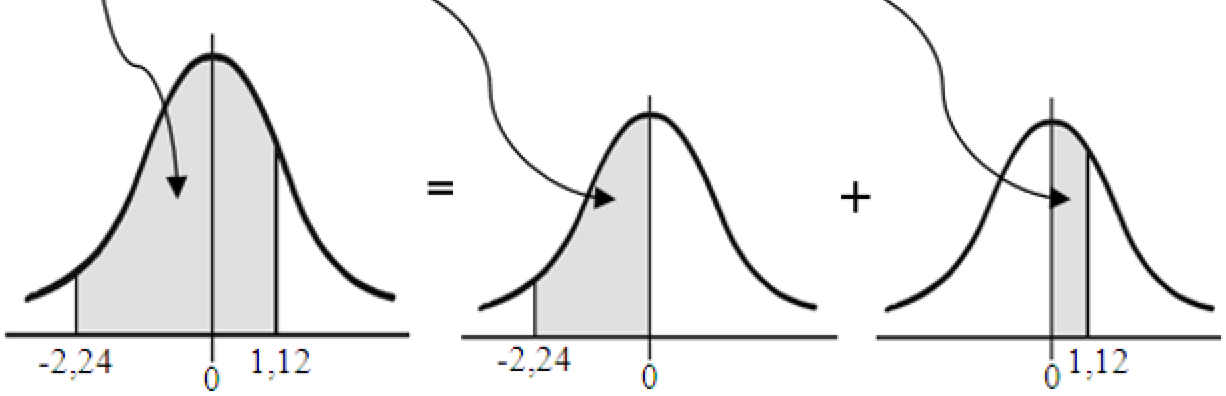
Lois usuelles continues: Loi Normale

Donc on aura :

$$p(-2,24 \leq T \leq 1,12) = p(-2,24 \leq T \leq 0) + p(0 \leq T \leq 1,12)$$

$$p(-2,24 \leq T \leq 1,12) = p(-2,24 \leq T \leq 0) + p(0 \leq T \leq 1,12)$$

$$= \quad 0,4875 \quad + \quad 0,3686 \quad = \quad 0,8561$$



Lois usuelles continues: Loi Normale

Exercice

Soit X une variable aléatoire qui désigne le poids en Kg d'un type de Poisson.

On suppose que X suit la loi normale de fonction de densité définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{1}{18}(x-10)^2}$$

i/ Donner l'espérance et la variance de poids de ce type de poisson.

ii/ Donner la probabilité pour que le poids d'u poisson donné soit inférieur à 12 Kg

iii/ Sachant que le poids d'un type de poison donnée est supérieur à 8 Kg.
Donner la probabilité pour que son poids soit inférieur à 12 Kg.

Lois usuelles continues: Loi Exponentielle

La loi Exponentielle est une loi qui est utilisée dans l'étude des phénomènes d'attente.

Elle est utilisé pour décrire l'intervalle de temps qui sépare deux évènements.

Par exemple :

- L'intervalle de temps séparant deux pannes consécution.
- Durée de vie d'une pièce.
- Intervalle de temps séparant deux arrivées consécutives à un guichet.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi Exponentielle de paramètre λ. Alors

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Lois usuelles continues: Loi Exponentielle

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Exemple:

Soit X une variable aléatoire continue qui représente la durée de vie d'un système électronique. Supposons que la durée de vie moyenne est 400 heures.

i/ Quelle est la loi de X

ii/ Donner la fonction de répartition de X

iii/ Calculer $E(X)$ et $V(X)$

Lois usuelles continues: Loi Khi-Deux

- Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:
  - $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, ..., n$
  - $Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j (i, j = 1, ..., n)$

- La variable aléatoire X définie par : $X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$

  Suit la loi de Khi-deux à n degré de liberté, on écrit $X \to \chi^2(n)$

Lois usuelles continues: Loi Student

- Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:

$$X_i \sim N(0,1), \forall i = 1,...,n \qquad \text{et} \qquad Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j \, (i, j = 1,...,n)$$

- Soit Y une variable aléatoires normale centrée réduite et indépendante de $X_1, X_2, ..., X_n$. i.e:

$$Y \sim N(0,1) \qquad \text{et} \qquad Cov(Y, X_i) = 0, \forall i = 1,...,n$$

- La variable aléatoire T définie par : $T = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{Z}{n}}}$ où $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$

suit la loi de Student à n dégrées de liberté. On écrit $T \to t_n$

Lois usuelles continues: Loi de Fisher

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ deux suites de variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. i.e:

  - $X_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, n$ et $Y_i \sim N(0,1), \forall i = 1, \ldots, m$
  - $Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j \, (i, j = 1, \ldots, n)$ et $Cov(Y_i, Y_j) = 0, \forall i \neq j \, (i, j = 1, \ldots, m)$

- La variable aléatoire F définie par:

$$F = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} = \frac{\frac{1}{n}X}{\frac{1}{m}Y} \quad \text{où} \quad X \sim \chi_n^2 \quad \text{et} \quad Y \sim \chi_m^2$$

suit la loi de Fisher à n et m degrés de liberté. On écrit $F \to F_{n,m}$

Lois usuelles continues: Loi Log-Normale

Soit X une variable aléatoire continue. X suit la loi log-Normale de paramètres μ et σ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \to LNor(\mu, \sigma)$

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
- $V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

Lois usuelles continues: Loi de Pareto

- La loi de Pareto est une loi qui ne prend des valeurs qu'au-delà d'un certain seuil pour des variables aléatoire. Cette loi est très employée en assurance.

- X une variable aléatoire qui suit la loi de Pareto de paramètres α et θ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les propriétés de X sont :

- $E[X] = \dfrac{\theta\alpha}{\alpha - 1}, si \quad \alpha \geq 1$
- $V[X] = \dfrac{\theta^2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)}, si \quad \alpha \succ 2$

On écrit $X \rightarrow Per(\alpha, \theta)$

Lois usuelles continues: Loi de Weibull

X une variable aléatoire qui suit la loi de Weibull de paramètres $\alpha, \beta \in R_+^{*}$ si sa fonction de densité est donnée par la formule suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les propriétés de X sont :

- $E[X] = \dfrac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$
- $V[X] = \dfrac{1}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$

On écrit $X \to Web(\alpha, \beta)$

Lois usuelles continues: Loi de Gamma

Une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $\alpha, \beta \in R_{+}^{\text{å}}$ si elle possède une densité de probabilité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & si \quad t > 0, \\ 0 & si \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Les propriétés de X sont :

- $E[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}$
- $V[X] = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

Théorème Centrale Limite

- Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires qui sont indépendantes, de même moyenne et variance. i.e:
  - $E(X_i) = m, \forall i = 1, ..., n$
  - $V(X_i) = \sigma^2, \forall i = 1, ..., n$

Posons :

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On a:

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nm$
- $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$

Théorème Centrale limite

Alors:

$$Y_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\overline{S}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Converge en loi vers une loi normale entrée réduite N(0,1). i.e:

$$Y_n \underbrace{\xrightarrow{\text{Converge en Loi}}}_{n\to+\infty} N(0,1)$$

Exemple:

Considérons 400 étudiants qui se sont présentées au guichet de la photocopie de la faculté pour faire des copies de cours sachant que chacun d'eux a payé à la caisse un montant $M_i\,(i = 1,\ldots,n)$. Supposons que les M_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi inconnue, de moyenne égale à 10 dh et de variance égale à 25 dh.

Donner la probabilité que la recette totale R du service de la photocopie soit supérieure à 4200 dh.

Théorème Centrale Limite

On a:

$$R = M_1 + M_2 + \ldots + M_{400} = \sum_{i=1}^{400} M(i)$$

Alors :

- $E(R) = 400m = 400 \times 10 = 4000$
- $V(R) = n\sigma^2 = 400 * (25)^2 = 10000$

D'après le théorème central limite on a : $\dfrac{R - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{R - 4000}{\sqrt{10000}} = \dfrac{R - 4000}{10000} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow P(R > 4200) = P\left(\frac{R-4000}{100} > \frac{4200-4000}{100}\right)$$

$$= P(T > 2) = 1 - \phi(2) = 0.0288$$

Selon la table de loi normale centrée réduite où $T = \dfrac{R-4000}{100} \sim N(0,1)$

Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

- Soit X une variable aléatoire suit la loi binomiale $B(n, p)$ avec n assez grand et p ni proche de 0 ni proche de 1. Alors la loi de X peut être approchée par une loi normale $N(m, \sigma^2)$, i.e :

$$X \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) \quad \text{où} \quad E[X] = m = np \quad \text{et} \quad V[X] = \sigma^2 = np(1-p)$$

- En pratique l'approximation est valable lorsqu'on a : $n \geq 20$, $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$

Exemple :

Etant donnée une entreprise qui a distribuée des produits de publicité à 1000 ménages. Sachant que la probabilité pour qu'un ménage ayant reçu le produit soit intéressé par celui-ci est égale à 0.45, quelle est la probabilité d'avoir parmi les 1000 ménages 470 ménages intéressées par le produit de publicité.

Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

- Soit X le nombre de manages intéressés par le produit parmi les 1000 ménages.

  On a: $X \sim B(1000, 0.45)$

- La probabilité recherché est égale à : $P(X = 470)$

- Vue la difficulté du calcul de cette probabilité, on sera amené à utiliser l'approximation d'une loi binomiale par la loi normale.

- Or $p = 0.41$ ni proche de 0 ni proche de 1, $n = 1000 \geq 20$, $np = 1000 \times 0.45 = 450 \geq 10$ et $n(1-p) = 1000 \times 0.55 = 550 \geq 10$ alors :

$$X \sim N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N\left(450, \sqrt{15.73}\right)$$

Donc $$P(X = 470) = \frac{1}{\sqrt{15.73}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{470-450}{\sqrt{15.73}}\right)^2} \simeq 0.01130$$

Approximation de la loi de poisson par la loi Normale

- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre λ, i.e: $X \sim P(\lambda)$

- Lorsque $\lambda \geq 20$ X peut être approchée par une loi normale $N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$

Exemple

Etant donné une société dont le nombre de fois qu'elle en rupture de stock durant une année est une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre 36. Quelle est la probabilité pour que le nombre de la société soit en rupture de stock durant une année soient inferieur à 39.

Approximation de la loi de poisson par la loi Normale

- Soit X le nombre de rupture de stock dans cette société durant une année. On a : $X \sim P(36)$
- La probabilité recherchée est : $P(X < 39) = \frac{e^{-36} \times 36^{0}}{0!} + \frac{e^{-36} \times 36^{1}}{1!} + \ldots + \frac{e^{-36} \times 36^{38}}{38!}$

$$= \mathrm{P}\left(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \ldots \cup \{X = 38\}\right)$$

- La difficulté du calcul, on préfère à passer à la loi normale, i.e: $X \sim N(36,6)$ alors :

$$P(X \leq 39) = \mathrm{P}\left(\frac{X-36}{6} \leq \frac{39-36}{6}\right) = \mathrm{P}(T < 0.5) = 0.6915$$

où $T \sim N(0,1)$